* تعاريف:

١- البنية الجبرية:

هي مجموعة غير خالية مزودة بعدد منتهٍ من قوانين التشكيل الداخلي او الخارجي

٢- الزمرة:

نقول عن بنية جبرية $(G, +)$ حيث $(+)$ قانون تشكيل داخلي انها زمرة اذا حققت الشروط التالية:

١- الخاصة التجميعية للقانون $(+)$

٢- يوجد في G حيادي بالنسبة للقانون $(+)$ نرمز له بـ 0

٣- يوجد في G لكل عنصر a نظير نرمز له $-a$

i.e. $a + (-a) = (-a) + a = 0$

٣- الحلقة:

هي بنية جبرية مزودة بقانوني تشكيل داخلي $(R, +, \cdot)$

١- زمرة $(R, +)$ تبديلية

٢- $(\alpha + \beta) r = \alpha r + \beta r$

٣- $\alpha(\beta r) = (\alpha \beta) r$

٤- يوجد حيادي

٥- يوجد نظير

٤- الحقل:

هو حلقة يكون لكل عنصر في الحقل مغاير للصفر مقلوب فيها

٥- الموديول: $(M, +, \cdot)$

$(\cdot)$: مجموعة مؤثرات حلقة R

١- $(M, +)$ زمرة تبديلية

٢- $1_R \cdot m \in M \, , \, \forall m \in M$

٣- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

٤- $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$

د. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$

---

* تمارين

① هل كل حلقة واحدية يمكن النظر اليها على انها مودول على ذاتها.
نعم، يمكن النظر اليها على ذاتها على انها مودول على ذاتها اذا اعتبرنا ان قانون التشكيل الخارجي هو المعرف على الحلقة هو قانون تشكيل خارجي مجموعة مؤثراته الحلقة نفسها.

---

② اذا كانت R حلقة واحدية، عرفنا المجموعة،

$R^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) ; a_i \in R, \forall i = 1, 2, \ldots\}$

لنعرف في المجموعة R^n قانون تشكيل الاول داخلي.

$\underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{x} + \underbrace{(y_1, \ldots, y_n)}_{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

$; \ x, y \in R^n$

والثاني خارجي مجموعة مؤثراته الحلقة R

$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$

$; \ x \in R^n \ , \ \alpha \in R$

اثبت ان $(R^n, +, \cdot)$ مودول على R.

$\forall x, y, z \in R^n , \ x = (x_1, \ldots, x_n)$

$y = (y_1, \ldots, y_n)$

$z = (z_1, \ldots, z_n)$

$x + (y + z) = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n)$

$= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1) + \ldots + (y_n + z_n)$

$= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, \ldots, z_n)$

$= (x + y) + z$

[illegible]

[illegible] R^n [illegible] $(0, \ldots, 0)$

$\forall x \in R^n, \; x = (x_1, \ldots, x_n)$

[illegible] $x + 0 = (x_1, \ldots, x_n) + (0, \ldots, 0)$

$= (x_1 + 0, \ldots, x_n + 0)$

$= (x_1, \ldots, x_n) = x$

[illegible] $0 + x = (0, \ldots, 0) + (x_1, \ldots, x_n)$

$= x$

[illegible] $x \in R^n$ [illegible] $(+)$

[illegible] $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$

$x + (-x) = (x_1, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, -x_n)$

$= (x_1 - x_1, \ldots, x_n - x_n)$

$= (0, \ldots, 0)$

$x, y \in R^n$

$x + y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)$

$= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

$= (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n)$

$= (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n)$

$= y + x$

[illegible]

$1 \cdot x = 1 \cdot (x_1, \ldots, x_n)$

$= (x_1, \ldots, x_n)$

$= x$

$$\alpha(x+y) = \alpha(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$$
$$= (\alpha(x_1+y_1), \ldots, \alpha(x_n+y_n))$$
$$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n)$$
$$= (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \ldots, \alpha y_n)$$
$$= \alpha x + \alpha y$$

$$(\alpha+\beta)x = (\alpha+\beta)(x_1, \ldots, x_n)$$
$$= [(\alpha+\beta)x_1, \ldots, (\alpha+\beta)x_n]$$
$$= [\alpha x_1 + \beta x_1, \ldots, \alpha x_n + \beta x_n]$$
$$= [(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \ldots, \beta x_n)]$$
$$= \alpha x + \beta x$$

$$\alpha(\beta x) = \alpha[\beta(x_1, \ldots, x_n)]$$
$$= \alpha(\beta x_1, \ldots, \beta x_n)$$
$$= (\alpha\beta x_1, \ldots, \alpha\beta x_n)$$
$$= [(\alpha\beta)x_1, \ldots, (\alpha\beta)x_n]$$
$$= (\alpha\beta)x$$

ومنه فإن $(R^n, +, \cdot)$ مودول على الحلقة R.

---

③ ليكن M زمرة تبديلية، ولتكن $End(M, +, \circ)$ حلقة التشاكلات الداخلية على M. لنعرف على M قانون تشكيل خارجي $(\cdot)$ مجموعة مؤثراته الحلقة $End(M)$ كما يلي.

$$(\cdot) : End(M) \times M \longrightarrow M$$
$$(f, m) \longrightarrow f \cdot m = f(m)$$

ماذا تلاحظ.

④ أثبت أن M مودول على $End(M)$

2) يعرّف R مودولاً $\mu : R \longrightarrow End(M)$

تشاكل حلقي حيث ، $\mu(1_R) = I_M$ فإن M تصبح مودول

بالنسبة الى قانون التشكيل الخارجي

$$(\cdot) : R \times M \longrightarrow M$$

$$(r, x) = [\mu(r)](m)$$

[illegible] المحاضرة ① [illegible]